Développement : Calculs de sommes de séries alternées.

RM

2022-2023

Référence :

1. Oraux X-ENS tome 2 Analyse p 189

Énoncé :

La série de terme générale $\frac{(-1)^n}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}$ est convergente et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}\right)=\frac{\pi^2}{16}.$$

Lemme 1 : On a que la série de terme générale $\frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge de somme $\frac{\pi}{4}$ et $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=arctan(x)$ sur $]-1,1[$.

Démonstration : La série $\sum(-1)^n\frac{1}{2n+1}$ converge, car elle vérifie le critère spécial des séries alternées (avec $u_n=(-1)^n\frac{1}{2n+1}$, on a bien que u_n est alternée, décroissante convergeant vers 0).
On va introduire la fonction f qui est une série entière avec $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. On utilise le critère de d'Alembert qui nous donne le rayon de convergence : $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{2n+3}{2n+1}\right|\underset{n\to+\infty}{\to}1$. On a donc $R=1$. On a donc que la fonction f est définie et dérivable sur $]-1,1[$.

| En effet, une série entière est toujours dérivable sur son disque de convergence.

On a pour tout $x\in]-1,1[$,

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nx^{2n}=\frac{1}{1+x^2}.$$

Puisque qu'on a $f(0)=0$, on en déduit que pour tout $x\in]-1,1[$, $f(x)=\arctan x$.
On a déjà montrer que f est définie en 1. Montrons que f est continue en 1 et on aura notre solution.
Pour tout $x\in[0,1]$, la série définissant f vérifie le critère spécial des séries alternées. On en déduit que le reste $R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ vérifie $|R_n(x)|\leq\frac{x^{2(n+1)+1}}{2(n+1)+1}\leq\frac{1}{2n+3}$.
On en déduit que la série des reste converge uniformément et donc que la série définie par f converge uniformément sur $[0,1]$ et donc est f est limite uniforme de fonction continue $[0,1]$, donc f est continue sur $[0,1]$ et en particulier en 1. On conclut donc que

$$f(1)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\arctan 1=\frac{\pi}{4}.$$

Résolution :

Posons, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}$. On a

$$u_{n+1}=\frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{2k+1}=\frac{1}{n+2}\left((n+1)u_n+\frac{1}{2n+3}\right).$$

On en déduit que $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+2}\left(\frac{1}{2n+3} - u_n\right)$. Or

$$u_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1} \geq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{n+1}\frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}.$$

Donc $-u_n \leq -\frac{1}{2n+1}$ et $u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{n+2}\left(\frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+1}\right) \leq 0$. Finalement la suite (u_n) est décroissante. De plus, on sait que

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1} \leq \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln 2n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$$

On en déduit que $u_n = O\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ et en particulier $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
On en déduit finalement que la série $\sum(-1)^n u_n$ converge d'après le cssa.
Pour calculer la somme S de cette série, on va procéder comme dans le lemme. On pose $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n x^n$. On sait que la rayon de convergence de g est supérieur ou égale à 1, car si $r = 1$, alors $(-1)^n u_n r^n$ est bornée car u_n est convergente vers 0. On a déjà montrer que la série convergeait en 1 et on av vérifier que g est continue sur $[0,1]$. Soit $x \in [0,1]$, alors la série g vérifie le cssa car $u_n x^n$ est à terme positif est décroissant vers 0. On a lors que le reste $R'_n(x)$ vérifie $|R'_n(x)| \leq u_{n+1}x^{n+1} \leq u_{n+1}$ pour tout $x \in [0,1]$. La série converge donc uniformément sur $[0,1]$ ce qui implique la continuité de g sur $[0,1]$.
Déterminons maintenant la valeur de $g(x)$. L'expression $(-x)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}$ fait penser à un produit de Cauchy. Et effectivement, on a , pour $x \in]-1,1[$

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{2n+1}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-x)^k}{2k+1}(-x)^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)u_n(-x)^n.$$

Or pour tout $x \in]0,1[$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{x}^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}^{2n+1}}{2n+1} = \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$$

On en déduit que $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)u_n(-x)^n = \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}$. En intégrant entre 0 et x pour $x \in]0,1[$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(-1)^n x^{n+1} = xg(x) = \int_0^x \frac{\arctan\sqrt{t}}{\sqrt{t}(1+t)}dt.$$

La continuité de g en 1 nous permet de dire que $S = g(1) = \int_0^1 \frac{\arctan\sqrt{t}}{\sqrt{t}(1+t)}dt$. On effectue alors le changement de variable bijectif de classe $\mathcal{C}^1$ $u = \sqrt{t}$ qui donne

$$S = \int_0^1 \frac{2\arctan u}{1+u^2}du = [(\arctan u)^2]_0^1 = (\pi/4)^2.$$

Finalement, on en déduit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}\right) = \frac{\pi^2}{16}.$$